我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

< 2022年3月 >

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”

昵称： 我是8位的
园龄： 4年7个月
粉丝： 288
关注： 5
+加关注

搜索

找找看
谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

线性代数笔记25——马尔可夫矩阵

A^T的特征值

矩阵**A**的特征值和A^T的特征值是一样的。

求解特征值的方法是det(**A**-λ**I**) = 0，根据行列式的性质，矩阵的行列式等于矩阵转置的行列式，因此：

$$\det(A-\lambda I)=\det(A-\lambda I)^T=\det(A^T-\lambda I)=0$$

因此λ也是A^T的特征值。

马尔可夫矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.01 & 0.3\\ 0.2 & 0.99 & 0.3\\ 0.7 & 0 & 0.4\end{bmatrix}$$

矩阵**A**有2个特点：**A**中的所有元素都是非负的；**A**中的每一列之和都等于1。形如**A**的矩阵称为马尔可夫矩阵。马尔可夫矩阵主要应用在概率领域。将一个马尔可夫矩阵进行方幂运算仍然得到马尔可夫矩阵。

当处理一个微分方程时，特征值0意味着得到了一个稳态。当进行矩阵的方幂运算时，稳态的条件包括：

1. $\lambda_1=1$是特征值之一。
2. 其他特征值的绝对值比1小，$|\lambda_i|<1$

给定一个向量$\mathbf{u}_0$和一个能够对角化的矩阵**A**，如果$\mathbf{u}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{u}_k$，那么：

$$u_k=A^ku_0=C_1\lambda_1^kx_1+C_2\lambda_2^kx_2\cdots+C_n\lambda_n^kx_n$$

当$\lambda_1=1$，其他特征值的绝对值比1小时，则u_k在k增大的过程中趋近于C_1x_1，即给出了一个稳态。x_1是A的特征向量，它的每个分量都是大于或等于0的值。

为什么一定有λ=1的特征值

马尔可夫矩阵的每一列之和为1，这个性质保证了矩阵有一个λ=1的特征值。

回顾前面的章节，我们通过下式来计算A的特征值：

$$\det(A-\lambda I)=0$$

如果λ=1时是一个特征值，那么**A**-λ**I**一定是一个奇异矩阵：

$$A-\lambda I=A-I=\begin{bmatrix}-0.9 & 0.01 & 0.3\\ 0.2 & -0.1 & 0.3\\ 0.7 & 0 & -0.6\end{bmatrix}$$

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

A减去单位向量相当于把A的每一列之和减去1，此时所有行向量相加得到0向量，这意味着一个行向量可以用另外两个行向量表示，因此行向量是线性相关的，A-I是奇异矩阵，一定会有det(A-I)=0。

人口的流动

对于方程$u_{k+1}=Au_k$，A是马尔可夫矩阵，我们用人口的流动解释马尔可夫矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}u_A\\ u_B\end{bmatrix}_{t=k+1}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_A\\ u_B\end{bmatrix}_{t=k}$$

u的分量分别表示两个城市人口，**A**中的每一列代表人口的去留比例。第一列的0.9表示留在u_A的人口占u_A总人口的90%，剩余10%流入u_B；第二列的0.2表示从u_B流入u_A的人口占u_B的20%，剩余80%留在u_B。每一列的加和为1保证了总人口不变。如果有一个初始值：

$$\begin{bmatrix}u_A\\ u_B\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}0\\ 1000\end{bmatrix}$$

表示在t=0时刻，u_A的总人口是0，是个待开辟的新城市，u_B有1000人。经过一次迁徙，在t=1时刻：

$$\begin{bmatrix}u_A\\ u_B\end{bmatrix}_{t=1}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_A\\ u_B\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}200\\ 800\end{bmatrix}$$

这次迁徙主要是从u_B迁入u_A，有200人进入u_A，剩余800人留在u_B。

我们希望获得长时间迁徙后的人口分布，这需要知道**A**的特征值和特征向量。**A**是马尔可夫矩阵，因此一个特征值是$\lambda_1=1$，通过矩阵的迹可知另一个特征值是$\lambda_2=0.9+0.8-1=0.7$。由此可以求得两个特征向量：

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1 I)\boldsymbol{x}=0\Rightarrow x_1=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix},x_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\text{通解：}\ u_k=A^k u_0=C_1\lambda_1^k x_1+C_2\lambda_2^k x_2=C_1\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+0.7^k C_2\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\text{根据初始条件求得 } C_1\text{和}C_2\text{：}\ \begin{bmatrix}0\\ 1000\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+0.7^k C_2\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow C_1=\frac{1000}{3},C_2=\frac{2000}{3}$$

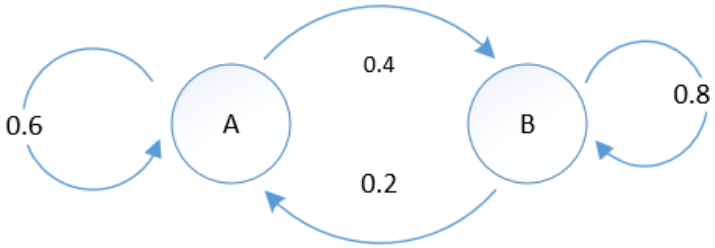
由于两个特征值符合方幂运算时达到稳态的条件，所以u_k在k增大的过程中趋近于C_1x_1，即最后经过多年的迁徙，两个城市的人口趋近于定值：

$$\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}_{t=k}=\frac{1000}{3}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

综合示例

一个颗粒可以在A和B之中来回跳动，跳动的概率如下图所示：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系
--trustInU



如果颗粒在A，下一次跳到B的概率是0.4，仍然留在A的概率是0.6；如果在B，下一次跳到A的概率是0.2，仍然留在B的概率是0.8。

如果颗粒最初在A，那么它一步之后，n步之后，无穷步后留在A或移动到B的概率是多少？

首先构建模型，将上图构造成马尔可夫矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

第一列表示颗粒停留在A的概率是60%，从A跳到B的概率是40%；第二列表示从B跳到A的概率是20%，停留在B的概率是80%。

颗粒最初在A位置，因此初始条件是：

$$\boldsymbol{u_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第一次移动后，停留在A的概率是60%，移动到B的概率是40%：

$$\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{A u_0} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

第n次移动后：

$$\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{u_0} = C_1 \lambda_1^n \boldsymbol{x_1} + C_2 \lambda_2^n \boldsymbol{x_2}$$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0.6 + 0.8 - 1 = 0.4$$

$$\text{when } \lambda_1 = 1$$

$$\text{then } (\boldsymbol{A} - \lambda_1 I)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.6-1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8-1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{when } \lambda_2 = 1$$

$$\text{then } (\boldsymbol{A} - \lambda_2 I)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.6-0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8-0.4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_n} = C_1 \boldsymbol{x_1} + C_2 0.4^n \boldsymbol{x_2} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 0.4^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{when } n = 0, \qquad \boldsymbol{u_0} = C_1 \boldsymbol{x_1} + C_2 \boldsymbol{x_2} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{3}, \qquad C_2 = \frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{u_n} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} 0.4^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

u_n的两个分量分别表示第n次移动后停留在A的概率和移动到B的概率。

$$\text{when } n \to \infty, \qquad \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{u_n} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} 0.4^{\infty} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

无穷步后，留在A的概率是33.33%。

作者：我是8位的

出处：http://www.cnblogs.com/bigmonkey

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”

随笔

分类: 线性代数

标签: 马尔可夫矩阵

好文要顶 关注我 收藏该文

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
+加关注

2 推荐 0 反对

« 上一篇： 线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
» 下一篇： 线性代数笔记26——傅立叶级数

posted on 2019-11-18 21:41 我是8位的 阅读(3006) 评论(1) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告
cloud.e-iceblue.cn
JAVA Office
文档在线编辑
APIs
打开

编辑推荐：
· 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
· ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
· .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
· 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

最新新闻:
· 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
· 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
· 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
· Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
· 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
» 更多新闻...

Powered by:
博客园
Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes